L-函数の近似函数等式について (解析的整数論)

本橋, 洋一

数理解析研究所講究録
193巻 1973年 42-96

L-函数の近似函数等式について

日大理工　本橋洋一

最近，零点密度理論は，Large Sieve や Halász の方法を得て H. L. Montgomery により長足の進歩がなされたが，その理論の展開にあたって，それ自身きわめて興味深い事実が本質的に用いられている。それは L-函数の直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上における4乗平均値である。Montgomery によれば，これは次の形をとる。

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) T \log^4 qT,$$

但し $\sum^{*}$ は原始指標についての和，$\varphi(q)$ は Euler 函数，更に $T \geqslant 2$ と仮定する。これはほとんど best-possible のものであり，その深さは，この不等式が Brun-Titchmarsh の定理の改良に深くかかわっているという最近の筆者自身の結果からもよくうかがわれるのである。

このように重要な事実にもかかわらず，いままでに発表された証明は，いずれも大すじに於ては優れるものの細部につ

いては多くの反省を求めざるを得ないものである。従って，極めて詳細な証明をこの講究録中に残しておくのは，単なる計算練習以上の意味をもつものと思われる。上記不等式の証明は Huxley 及び Lavrik-Montgomery のものがあるが，いずれも根底には Linnik の深い考察があることを注意しておくべきであろう。

ここでは Lavrik の次の２つの論文を中心にして計算をすすめていくことにする。

A. F. Lavrik :

(1) A functional equation for Dirichlet L-series and the problem of divisors in arithmetic progressions

A.M.S. Transl., (2) 82 (1969), 47 − 65.

(2) An approximate functional equation for the Dirichlet L-function

Trans. Moscow Math. Soc., 18 (1968), 101−115.

1.) Landau の θ-変換公式.

$\mathrm{Re}(z)>0$, $a=\frac{1}{2}(1-\chi(-1))$, χ : primitive mod q

なる条件下で

$$z^{\frac{1}{2}+a}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{a}e^{-\frac{\pi}{q}zn^{2}}=\varepsilon(\chi)\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\chi}(n)n^{a}e^{-\frac{\pi}{qz}n^{2}}.$$

$\varepsilon(\chi)$は χ についての Gauss和から誘導されるもので $|\varepsilon(\chi)|=1$.

2.) $\mathrm{Re}\, s=\sigma>0$ のとき

$$\int_0^{\infty}e^{-\frac{\pi z}{q}n^2\xi}\,\xi^{\frac{s+a}{2}-1}\,d\xi=\left(\frac{q}{\pi n^2 z}\right)^{\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right).$$

3.) 従って $\mathrm{Re}\, s=\sigma>1$ ならば

$$\left(\frac{q}{\pi z}\right)^{\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{a}\left(\frac{q}{\pi n^2 z}\right)^{\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{a}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\pi z}{q}n^2\xi}\,\xi^{\frac{s+a}{2}-1}\,d\xi$$

$$=\int_0^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{a}e^{-\frac{\pi z}{q}n^2\xi}\right\}\xi^{\frac{s+a}{2}-1}\,d\xi$$

$$=\int_1^{\infty}+\int_0^{1}$$

θ変換公式によって

$$\int_0^1 = \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi z}{q\xi} n^2} \right\} \xi^{-\frac{s+a}{2}-1} \, d\xi$$

$$= \varepsilon(\chi) \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}+a} \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} \, d\xi .$$

従って

$$\left(\frac{q}{\pi z}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$

$$= \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi z}{q} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} \, d\xi \; +$$

$$+ \varepsilon(\chi) \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}+a} \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} \, d\xi .$$

右辺は全ての s について絶対収束，よってこれは全ての s について成立する。

4) 以下 $0 < \alpha < 1$ とする。又，$x > 0$ を任意にとる。

$$\int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{q} z n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} \, d\xi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^\infty \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{q} z n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} \, d\xi$$

$$= \sum_{n \le x} + \sum_{n > x}$$ とわける。

$$\sum_{n \le x} = \sum_{n \le x} \chi(n) n^a \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{\pi z}{q} n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 e^{-\frac{\pi z}{q} n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \right\}$$

$$= \sum_{n \le x} \chi(n) n^a \left\{ \left(\frac{q}{\pi z n^2}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) - \left(\frac{q}{\pi z n^2}\right)^{\frac{s+a}{2}} \gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} n^2\right) \right\}$$

但し $$\gamma(\alpha, \beta) = \int_0^\beta e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi .$$

$$\sum_{n \le x} = \left(\frac{q}{\pi z}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \left\{ \sum_{n \le x} \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_{n \le x} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \right\}.$$

一方

$$\sum_{n > x} = \left(\frac{q}{\pi z}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} .$$

但し

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \int_\beta^\infty e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi .$$

5.) 次に $y > 0$ を任意にとって，

$$\int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \sum_{n\leq y} + \sum_{n>y} .$$

$$\sum_{n\leq y} = \sum_{n\leq y} \bar{\chi}(n) n^a \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi \right\}$$

$$= \sum_{n\leq y} \bar{\chi}(n) n^a \left\{ \left(\frac{qz}{\pi n^2}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) - \left(\frac{qz}{\pi n^2}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right) \right\}$$

$$= \left(\frac{qz}{\pi}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \left\{ \sum_{n\leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} - \sum_{n\leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)} \right\}.$$

一方

$$\sum_{n>y} = \left(\frac{qz}{\pi}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \sum_{n>y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)} .$$

6.) 以上 3) 4) 5.) をまとめると

$$0 < \alpha < 1$$

のとき，任意の $x,\ y>0$ について

$$L(s,\chi)=\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s}+\varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\sum_{n\le y}\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}-$$

$$-\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s}\cdot\frac{\gamma\left(\frac{s+a}{2},\frac{\pi}{q}zn^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}+\sum_{n>x}\frac{\chi(n)}{n^s}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2},\frac{\pi}{q}zn^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}-$$

$$-\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\varepsilon(\chi)\sum_{n\le y}\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}\cdot\frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2},\frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}+$$

$$+\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\varepsilon(\chi)\sum_{n>y}\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2},\frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}.$$

これが Lavrik の"函数等式"である。ここで重要なのは変数 z が $\mathrm{Re}\,z>0$ でさえあれば何でもよいという点である。これが以下の計算では $\mathrm{Arg}\,z$ をなるべく $\frac{\pi}{2}$ に近くして，上記の等式にあらわれる

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

から出る $e^{+\frac{\pi}{4}|t|}$ という大きな値を消してしまうことに用いられるのである。このことにはじめて想到したのが Linnik である。

以下，次の約束[Y]を設定する。

$$[\mathrm{Y}]\ \begin{cases} t \geqq 1, \quad q \geqq 2, \quad \Delta > 0, \quad 0 < a < 1 \\ z = \Delta^2 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)\right) = \Delta^2 \sin\frac{1}{t} + i\Delta^2 \cos\frac{1}{t} \\ x = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{qt}{2\pi}}, \quad y = \Delta\sqrt{\frac{qt}{2\pi}} \quad \left(xy = \frac{qt}{2\pi}\right) \end{cases}$$

7.) まず

$$F_1 = \sum_{n \geqq x \log qt} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

の評価をする。

$v_1 < v_2$ は任意として $\displaystyle\sum_{v_1 < n < v_2} \frac{\chi(n)}{n^s}$ は（s をとめて）有界. 又

$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) \longrightarrow 0 \quad (v \to \infty)$ も明らか。

よって部分積分法により

$$F_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{x \log qt}^{\infty} \left\{ \sum_{x \log qt \leqq n \leqq v} \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} \frac{d}{dv} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) dv$$

$\Gamma(\alpha, \beta)$ の定義から

$$\frac{d}{dv} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) = -\frac{2\pi z v}{q} e^{-\frac{\pi z}{q} v^2} \left(\frac{\pi}{q} z v^2\right)^{\frac{s+a}{2} - 1}.$$

従って

$$F_1 = -2\,\frac{\left(\frac{\pi}{q}z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\int_{x\log qt}^{\infty}\Big\{\sum_{x\log qt\le n\le v}\frac{\chi(n)}{n^s}\Big\}\,v^{s+a-1}\,e^{-\frac{\pi}{q}zv^2}\,dv.$$

しかるに

$$\left|\left(\frac{\pi}{q}z\right)^{\frac{s+a}{2}}\right| \ll q^{-\frac{\sigma+a}{2}}\,\Delta^{\sigma+a}\,\left|\exp\left(\frac{s+a}{2}i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}\right)\right)\right|$$

$$\ll q^{-\frac{\sigma+a}{2}}\,\Delta^{\sigma+a}\,e^{-\frac{\pi}{4}t},$$

スターリングの公式により

$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|} \ll e^{\frac{\pi}{4}t}\,t^{\frac{1-\sigma-a}{2}} \qquad (\because\ t\geq 1).$$

更に

$$\left|e^{-\frac{\pi}{q}zv^2}\right| \leq e^{-\frac{\pi}{q}\Delta^2 v^2\sin\frac{1}{t}} \leq e^{-\frac{2}{qt}\Delta^2 v^2} \qquad \left(\because\ \sin\alpha \geq \frac{2}{\pi}\alpha\right)\ \left(0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

又，一方 Pólya - Vinogradov の定理

$$\Big|\sum_{v_1\le n\le v_2}\chi(n)\Big| \ll \sqrt{q}\,\log q$$

によって

$$\Big|\sum_{x\log qt\le n\le v}\frac{\chi(n)}{n^s}\Big| \ll \frac{\sqrt{q}\log q}{v^{\sigma}} + |s|\int_{x\log qt}^{v}\frac{\sqrt{q}\log q}{\xi^{\sigma+1}}\,d\xi$$

$$\ll \frac{t\sqrt{q}\log q}{(x\log qt)^{\sigma}} \qquad (\because\ t\geq 1)$$

$$\ll \Delta^{\alpha} t \sqrt{q} \log q \;\; (qt)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

以上をまとめると

$$|F_1| \ll \Delta^{2\alpha+a} q^{\frac{1}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} t^{\frac{3}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} \log q \int_{x\log qt}^{\infty} e^{-\frac{2}{qt}\Delta^2 v^2} v^{\alpha+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\alpha+a} q^{\frac{1}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} \cdot t^{\frac{3}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} \log q \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{qt}(x\log qt)^2} \times$$

$$\times \int_{x\log qt}^{\infty} e^{-\frac{\Delta^2}{qt}v^2} v^{\alpha+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\alpha+a} (qt)^{\frac{3}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi}(\log qt)^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Delta^2}{qt}v^2} v^{\alpha+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\alpha+a} (qt)^{\frac{3}{2}-\alpha-\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi}(\log qt)^2} \left(\frac{\sqrt{qt}}{\Delta}\right)^{\alpha+a}.$$

従って

$$|F_1| \ll \Delta^{\alpha} (qt)^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi}(\log qt)^2}$$

$$\ll_M \Delta^{\alpha} (qt)^{-M} \qquad (M: 任意).$$

8.) 次に

$$F_2 = \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{n \geq y \log qt} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

$$= -2\,\varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\left(\frac{\pi}{qz}\right)^{\frac{1-s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{y \log qt}^{\infty} \left\{ \sum_{y \log qt \leq n \leq v} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right\} v^{(1-s+a)-1} e^{-\frac{\pi}{qz} v^2}\, dv.$$

$$\left| \left(\frac{\pi}{qz}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \right| \ll q^{\frac{-1+\sigma-a}{2}} \Delta^{-1+\sigma-a} e^{-\frac{\pi}{4} t}$$

$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|} \ll e^{\frac{\pi}{4} t} t^{\frac{1-\sigma-a}{2}}$$

$$\left| \sum_{y \log qt \leq n \leq v} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right| \ll \frac{t\sqrt{q} \log q}{(y \log qt)^{1-\sigma}} \ll t\sqrt{q} \log q \cdot \Delta^{\sigma-1} (qt)^{\frac{\sigma-1}{2}}$$

$$\left| e^{-\frac{\pi}{qz} v^2} \right| \ll e^{-\frac{2}{qt\Delta^2} v^2}$$

よって

$$|F_2| \ll \Delta^{2\sigma-2-a} t^{1-\frac{a}{2}} q^{\sigma-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}} \log q \cdot e^{-\frac{1}{qt\Delta^2}(y \log qt)^2} \cdot (\Delta\sqrt{qt})^{1-\sigma+a}$$

$$\ll \Delta^{\sigma-1} t^{\frac{3}{2}-\frac{\sigma}{2}} q^{\frac{\sigma}{2}} \log q \; e^{-\frac{1}{2\pi}(\log qt)^2}$$

$$\ll_M \Delta^{\sigma-1} (qt)^{-M}$$

9.) 以上 6.)7.)8.)をまとめると［Y］なる条件のもとに，M を任意の正数として，次の "Lavrik の近似函数等式" を得る。

$$L(s,\chi)=\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s}+\varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\sum_{n\le y}\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}+$$

$$+\sum_{n\le x\log qt}\chi(n)F(s,n,x)+\sum_{n\le y\log qt}\bar{\chi}(n)G(s,n,y)+$$

$$+O_M\left(\Delta^{\sigma}(qt)^{-M}\right).$$

但し

$$F(s,n,x)=\begin{cases}-\dfrac{\gamma\left(\frac{s+a}{2},\frac{\pi}{q}n^2z\right)}{n^s\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n\le x).\\[2ex] \dfrac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2},\frac{\pi}{q}n^2z\right)}{n^s\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n>x).\end{cases}$$

$$G(s,n,y)=\begin{cases}-\varepsilon(\chi)\left(\dfrac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\dfrac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2},\frac{\pi}{qz}n^2\right)}{n^{1-s}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n\le y).\\[2ex] \varepsilon(\chi)\left(\dfrac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2},\frac{\pi}{qz}n^2\right)}{n^{1-s}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n>y).\end{cases}$$

以下 F, G の評価に入る。

10.) まず $F(s,n,x)$, $n \leq x$ の場合.

$$\gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} z n^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{q} z n^2} e^{-\xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \left(\frac{\pi}{q} z n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 z \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \left(\frac{\pi}{q} z n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} f_n(0) \quad \text{とする。}$$

$$F(s,n,x) = -\frac{1}{n^s} \left(\frac{\pi}{q} z n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(0)$$

よって

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{n^{\sigma+a} q^{-\frac{\sigma+a}{2}} \Delta^{\sigma+a} e^{-\frac{\pi}{4}t}}{n^\sigma e^{-\frac{\pi}{4}t} t^{\frac{\sigma+a}{2}-1}} |f_n(0)|$$

$$\ll n^a (qt)^{-\frac{\sigma+a}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^{\sigma+a} |f_n(0)|$$

$$\ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^\sigma |f_n(0)|$$

$$\ll (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^\sigma |f_n(0)|$$

$$\left(\because \frac{\Delta n}{\sqrt{qt}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

さて，$f_n(0)$ については，

$$f_n(0)=\int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi}{g}n^2\Delta^2\sin\frac{1}{t}\cdot\xi+\frac{ti}{2}\log\xi-i\frac{\pi}{g}n^2\Delta^2\cos\frac{1}{t}\cdot\xi\right)\xi^{\frac{\sigma+a}{2}-1}d\xi$$

$\xi\to u^{\frac{2}{\sigma+a}}$ と変換して

$$f_n(0)=\frac{2}{\sigma+a}\int_0^1 \exp\left\{-\frac{\pi}{g}n^2\Delta^2\sin\frac{1}{t}\cdot u^{\frac{2}{\sigma+a}}+i\left(\frac{t}{\sigma+a}\log u-\frac{\pi}{g}n^2\Delta^2\cos\frac{1}{t}\cdot u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right)\right\}du$$

$$=\frac{2}{\sigma+a}\int_0^1 \exp\left(-H(u)+iE(u)\right)du$$ とする。

以下，オ2平均値定理が重要な手段になる。

$$E'(u)=\frac{1}{(\sigma+a)u}\left\{t-\frac{2\pi}{g}n^2\Delta^2\cos\frac{1}{t}\,u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right\}$$

であるが，今後の計算のみとおしを良くするために，

$$n=x\,(1-\rho(u))=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{gt}{2\pi}}\,(1-\rho(u))\qquad(\rho(u)\geq 0)$$

とおくことにすると，

$$E'(u)=\frac{t}{(\sigma+a)u}\left\{1-(1-\rho(u))^2\cos\frac{1}{t}\,u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right\}$$

と書ける。

この $E'(u)$ について次のことに注意する。

(イ) $E'(u) \geqslant \dfrac{t}{(\alpha+a)u}\left(1-(1-\rho(n))^2\right) > 0 \qquad (0 \leq u \leq 1)$

であり， $E'(u) \neq 0 \qquad (0 \leq u \leq 1)$.

(ロ) 又，

$$E''(u) = -\frac{t}{(\alpha+a)u^2}\left(1+(1-\rho(n))^2\cos\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{2}{\alpha+a}-1\right)u^{\frac{2}{\alpha+a}}\right)$$

において $\dfrac{2}{\alpha+a} > 1 \quad (\because\ 0<\alpha<1)$ であるから

$$E''(u) < 0.$$

すなわち

$\dfrac{1}{E'(u)}$ は $u=0$ において 0，そして $0 \leq u \leq 1$ で単調増大.

次に $\rho(n)$ の大きさによって2つの場合にわける。

(i) $\rho(n) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のとき。

$E'(u) \neq 0$ であるから

$$i\left(\frac{\alpha+a}{2}\right) f_n(0) = \int_0^1 \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)}\, d e^{iE(u)}$$

$$= \left[\frac{e^{-H(u)+iE(u)}}{E'(u)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)+iE(u)}\, du$$

$$+ \int_0^1 \frac{E''(u)}{(E'(u))^2} e^{-H(u)+iE(u)}\, du$$

$$= \frac{e^{-H(1)+iE(1)}}{E'(1)} + f_n^{(1)}(0) + f_n^{(2)}(0)$$ と書く。

$$|f_n^{(1)}(0)| \leqq \int_0^1 \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)}\,du \leqq \frac{1}{E'(1)} \int_0^1 H'(u) e^{-H(u)}\,du$$

$$= \frac{1}{E'(1)} \left\{ 1 - e^{-H(1)} \right\}.$$

又，

$$|f_n^{(2)}(0)| \leqq \int_0^1 \frac{|E''(u)|}{(E'(u))^2} e^{-H(u)}\,du \leqq -\int_0^1 \frac{E''(u)}{E'(u)^2}\,du \qquad (\because E''(u) < 0)$$

$$= \frac{1}{E'(1)}.$$

従って，まとめると

$$\frac{\alpha+a}{2} |f_n(0)| \leqq \frac{e^{-H(1)}}{E'(1)} + \frac{1}{E'(1)} (1 - e^{-H(1)}) + \frac{1}{E'(1)}$$

$$= \frac{2}{E'(1)}$$

$$= \frac{2(\alpha+a)}{t\left(1 - (1-\rho(n))^2 \cos\frac{1}{t}\right)}$$

$$\leqq \frac{2(\alpha+a)}{t\left(1 - (1-\rho(n))^2\right)}.$$

故に

$$|f_n(0)| \leq \frac{4}{t(1-(1-\rho(n))^2)}$$

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{\Delta^\sigma (gt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{\sqrt{t}\,(1-(1-\rho(n))^2)} .$$

しかるに，

$$\sqrt{t}\,(1-(1-\rho(n))^2) = \sqrt{t}\,\rho(n)(2-\rho(n)) \geq \sqrt{t}\,\rho(n) \geq 1$$

であるから

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{\Delta^\sigma (gt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,(1-(1-\rho(n))^2)}$$

と書いてよい。更に $n \leq x$ ならば $\frac{2}{gt}n^2\Delta^2 \leq \frac{1}{\pi}$ であるから $e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2} \geq e^{-\frac{1}{\pi}}$.

従って結局

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{\Delta^\sigma (gt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,(1-(1-\rho(n))^2)}\, e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^\sigma (gt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2} .$$

(ii) 次に $\rho(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合を考える。

$$\frac{\sigma+a}{2} f_n(0) = \left\{ \int_0^{(1-\frac{1}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}} + \int_{(1-\frac{1}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}}^1 \right\} e^{-H(u)+iE(u)}\, du$$

$= f_n'(0) + f_n''(0)$ と分割する。

$$|f_n''(0)| \leq \left(1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}\right) \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}$$

一方 $f_n'(0)$ については ($t=1$ の場合は当然 $f_n'(0)=0$)

$$E'(u) \geq \frac{t}{(\sigma+a)\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}\left\{1-(1-\rho(u))^2\cos\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}\left\{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{(\sigma+a)\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}$$

$$i f_n'(0) = \int_0^{\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}} \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)}\, de^{iE(u)}$$

$$\ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}.$$

まとめると

$$|f_n(0)| \ll \frac{1}{\sqrt{t}} \ll \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{2}{qt}n^2\Delta^2}$$

$$|F(s,n,x)| \ll \Delta^{\sigma}\,(qt)^{-\frac{a}{2}}\, e^{-\frac{2}{qt}n^2\Delta^2}$$

$\rho(n) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ であるから

$$\sqrt{t}\ |\,1-(1-\rho(n))^2\,| = \sqrt{t}\,\rho(n)\,(2-\rho(n)) \leq 2$$

従って

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{\Delta^a\,(gt)^{-\frac{a}{2}}\,e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2}}{1+\sqrt{t}\,(1-(1-\rho(n))^2)}$$

$$= \frac{\Delta^a\,(gt)^{-\frac{a}{2}}}{1+\sqrt{t}\,|\,1-(\frac{n}{x})^2\,|}\,e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2}.$$

以上 (i) (ii) の結果をまとめると，

$n \leq x$ のとき

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{\Delta^a\,(gt)^{-\frac{a}{2}}}{1+\sqrt{t}\,|\,1-(\frac{n}{x})^2\,|}\,e^{-\frac{2}{gt}n^2\Delta^2}.$$

ii.) $F(s,n,x)$, $n \geq x$ の場合.

$$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{g}zn^2\right) = \int_{\frac{\pi}{g}zn^2}^{\infty} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{s+a}{2}-1}\,d\xi$$

$$= \left(\frac{\pi}{g}n^2z\right)^{\frac{s+a}{2}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{g}zn^2\xi}\,\xi^{\frac{s+a}{2}-1}\,d\xi$$

$$= \left(\frac{\pi}{g}n^2z\right)^{\frac{s+a}{2}} f_n(1)$$ とする。

$$F(s,n,x) = \frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s\, \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(1).$$

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{q^{-\frac{\sigma+a}{2}}\, n^{\sigma+a}\, \Delta^{\sigma+a}\, e^{-\frac{\pi}{4}t}}{n^{\sigma}\, e^{-\frac{\pi}{4}t}\, t^{\frac{\sigma+a}{2}-\frac{1}{2}}} |f_n(1)|$$

$$\ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{qt}}\right)^{a} (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^{\sigma}\, |f_n(1)|.$$

$$f_n(1) = \frac{2}{\sigma+a} \int_1^{\infty} \exp\left(-H(u) + iE(u)\right) du,$$

但し $H(u)$, $E(u)$ は前節と同じ。

$$E'(u) = \frac{1}{(\sigma+a)u} \left\{ t - \frac{2\pi}{q} n^2 \Delta^2 \cos\frac{1}{t}\, u^{\frac{2}{\sigma+a}} \right\}$$

であるが $n = x(1+\rho(n)) = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{qt}{2\pi}}\,(1+\rho(n))$ $(\rho(n) \geqq 0)$ と

おけば,

$$E'(u) = \frac{t}{(\sigma+a)u} \left(1 - (1+\rho(n))^2 \cos\frac{1}{t}\, u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right)$$

$$E''(u) = -\frac{t}{(\sigma+a)u^2} \left(1 + (1+\rho(n))^2 \cos\frac{1}{t} \left(\frac{2}{\sigma+a} - 1\right) u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right) < 0.$$

ここで $\rho(n)$ の大きさについて２つの場合にわける。

(i)' $\rho(n) \geqq \frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合

$u \geqq 1$ であるから

$$E'(u) \leqq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left(1-(1+\rho(u))^2 \cos\frac{1}{t}\right).$$

又，$\cos\dfrac{1}{t} \geqq 1-\dfrac{2}{\pi t} \quad (t \geqq 1)$ であるから

$$E'(u) \leqq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left(1-(1+\rho(u))^2\left(1-\frac{2}{\pi t}\right)\right).$$

しかるに

$$1-(1+\rho(u))^2\left(1-\frac{2}{\pi t}\right)$$

$$=\left\{1-(1+\rho(u))^2\right\}\left\{1-\frac{\frac{2}{\pi t}(1+\rho(u))^2}{(1+\rho(u))^2-1}\right\}$$

$$1-\frac{\frac{2}{\pi t}(1+\rho(u))^2}{(1+\rho(u))^2-1} = 1-\frac{2}{\pi t}-\frac{2}{\pi t\left((1+\rho(u))^2-1\right)}$$

$$= 1-\frac{2}{\pi t}-\frac{2}{\pi t\,\rho(u)(2+\rho(u))}$$

$$\geqq 1-\frac{2}{\pi t}-\frac{1}{\pi t\,\rho(u)}$$

$$\geqq 1-\frac{2}{\pi t}-\frac{1}{\pi\sqrt{t}} \geqq 1-\frac{3}{\pi} \quad (>0).$$

従って

$$E'(u) \leqq -\frac{t}{(\sigma+a)u}\left((1+\rho(u))^2-1\right)\left(1-\frac{3}{\pi}\right) < 0 .$$

まとめると，$\rho(u) > \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ ならば

$E'(u)$ は常に負

$\dfrac{1}{|E'(u)|}$ は $u=1$ で最大

$$\frac{1}{|E'(1)|} \leq \frac{\alpha+a}{t} \cdot \frac{\pi}{\pi-3} \cdot \frac{1}{(1+\rho(u))^2-1} .$$

さて，とにかく $E'(u) \neq 0$ であるから，

$$i\left(\frac{\alpha+a}{2}\right) f_n(1) = \int_1^\infty \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)}\, d e^{iE(u)}$$

$$= \left[\frac{e^{-H(u)+iE(u)}}{E'(u)}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)+iE(u)}\, du$$

$$+ \int_1^\infty \frac{E''(u)}{E'(u)^2} e^{-H(u)+iE(u)}\, du$$

$$= -\frac{e^{-H(1)+iE(1)}}{E'(1)} + f_n^{(1)}(1) + f_n^{(2)}(1) \quad \text{とする。}$$

$$|f_n^{(1)}(1)| \leq \int_1^\infty \frac{H'(u)}{|E'(u)|} e^{-H(u)}\, du$$

$$\leq \frac{1}{|E'(1)|} \int_1^\infty H'(u)\, e^{-H(u)} = \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|} .$$

$$|f_n^{(2)}(1)| \leqq \int_1^\infty \frac{|E''(u)|}{E'(u)^2} e^{-H(u)} du$$

$$\leqq e^{-H(1)} \int_1^\infty \left\{ -\frac{E''(u)}{E'(u)^2} \right\} du \qquad (\because E''(u) < 0)$$

$$= e^{-H(1)} \left[\frac{1}{E'(u)} \right]_1^\infty = -e^{-H(1)} \frac{1}{E'(1)} = \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|} .$$

$(\because \frac{1}{E'(u)} \to 0 \quad (u \to \infty)$, これは $\frac{2}{\alpha+a} > 1$ から出る.)

まとめると

$$\frac{\alpha+a}{2} |f_n(1)| \leqq 3 \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|}$$

$$\leqq \frac{3\pi}{\pi-3} (\alpha+a) \frac{e^{-H(1)}}{t\,((1+\rho(u))^2-1)} .$$

よって

$$|f_n(1)| \ll \frac{e^{-\frac{\pi}{8} n^2 \Delta^2 \sin\frac{1}{t}}}{t\,((1+\rho(u))^2-1)}$$

$$\ll \frac{e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}}{t\,((1+\rho(u))^2-1)} .$$

$$|F(n,s,x)| \ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{8t}} \right)^a (8t)^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta^\alpha \frac{e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}}{\sqrt{t}\,((1+\rho(u))^2-1)} .$$

しかるに　$\sqrt{t}\,((1+\rho(n))^2-1) = \sqrt{t}\,\rho(n)\,(2+\rho(n)) \geqq 2$.

又，明らかに

$$e^{-\frac{n^2\Delta^2}{qt}} \leqq \left(\frac{qt}{n^2\Delta^2}\right)^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{\sqrt{qt}}{n\Delta}\right)^{a}.$$

よって　$\rho(n) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$　ならば

$$|F(n,s,x)| \ll \frac{\Delta^{\sigma}\,(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}\,e^{-\frac{1}{qt}\Delta^2 n^2}.$$

(ii)′　$\rho(n) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$　のとき。

$$\frac{\sigma+a}{2} f_n(1) = \left\{\int_1^{\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}} + \int_{\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}^{\infty}\right\} e^{-H(u)+iE(u)}\,du$$

$= f_n'(1) + f_n''(1)$　と分割する。

$$|f_n'(1)| \leqq \left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}-1\right)e^{-H(1)} \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}\,e^{-H(1)}.$$

$f_n''(1)$ については，　$u \geqq \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}$　ならば，

$$-E'(u) = \frac{t}{(\sigma+a)u}\left((1+\rho(n))^2\cos\frac{1}{t}\;u^{\frac{2}{\sigma+a}}-1\right)$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left(\cos\frac{1}{t} \left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right) - 1 \right)$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left\{ \left(1-\frac{2}{\pi t}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right) - 1 \right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\pi t}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right) \right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u}\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{3}{\pi t}\right\} \geq \frac{2\sqrt{t}}{(\sigma+a)u}\left(1-\frac{3}{\pi}\right).$$

よって

$$i f_n''(1) = \int_{\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}^{\infty} \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)}\, d e^{iE(u)}$$

$$\ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}\, e^{-H(1)}.$$

まとめると

$$\frac{\sigma+a}{2}\,|f_n(1)| \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}\, e^{-H(1)}.$$

よって $\rho(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ のとき

$$|F(n,s,x)| \ll (qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\, \Delta^{\sigma} \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{qt}}\right)^{a} e^{-\frac{2}{qt}n^2\Delta^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^{\sigma}\,(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{n^2}{qt}\Delta^2}.$$

以上 (i)′, (ii)′ の結果をまとめると,

$n > x$ のとき

$$|F(n,s,x)| \ll \frac{\Delta^{\sigma}(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,|1-(\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{n^2}{qt}\Delta^2}$$

12.) 以上 10.) 及び 11.) の結果をまとめると,

全ての n に対して

$$|F(n,s,x)| \ll \frac{\Delta^{\sigma}(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,|1-(\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{\Delta^2}{qt}n^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^{\sigma}(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1+\sqrt{t}\,|1-(\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{1}{2\pi}(\frac{n}{x})^2}.$$

13.) $G(s,n,y)$ の評価, $n \leq y$ の場合

$$G(s,n,y) = -\varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{qz}n^2\right)}{n^{1-s}\,\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

$$= -\varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\left(\frac{\pi}{qz}n^2\right)^{\frac{1-s+a}{2}}}{n^{1-s}\,\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{qz}n^2\xi}\, \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1}\, d\xi.$$

よって

$$|G(s,n,\chi)| \ll \frac{q^{\frac{1}{2}-\sigma}\, q^{\frac{-1+\sigma-a}{2}}\, n^{1-\sigma+a}}{n^{1-\sigma}\, e^{-\frac{\pi}{4}t}\, t^{\frac{\sigma+a-1}{2}}}\, \Delta^{-1+\sigma-a}\, e^{-\frac{\pi}{4}t}\, |g_n(0)|$$

$$= \left(\frac{n}{\Delta\sqrt{qt}}\right)^{a} (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^{\sigma-1}\, |g_n(0)|$$

$$\ll (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{t}\, \Delta^{\sigma-1}\, |g_n(0)| \qquad \left(\because \frac{n}{\Delta\sqrt{qt}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

但し

$$g_n(0) = \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{qz}n^2\xi}\, \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1}\, d\xi$$

$$= \int_0^1 \exp\left\{-\frac{\pi}{q\Delta^2} n^2 \sin\frac{1}{t}\cdot\xi - \frac{ti}{2}\log\xi + i\frac{\pi}{q\Delta^2} n^2 \cos\frac{1}{t}\cdot\xi\right\} \xi^{\frac{1-\sigma+a}{2}-1}\, d\xi$$

$\xi \to u^{\frac{2}{1-\sigma+a}}$ と変換して,

$$g_n(0) = \frac{2}{1-\sigma+a}\int_0^1 \exp\left\{-\frac{\pi}{q\Delta^2}\sin\frac{1}{t}\, u^{\frac{2}{1-\sigma+a}} - i\left(\frac{t}{1-\sigma+a}\log u - \frac{\pi n^2}{q\Delta^2}\cos\frac{1}{t}\, u^{\frac{2}{1-\sigma+a}}\right)\right\} du$$

$$= \frac{2}{1-\sigma+a}\int_0^1 \exp\left(-H_1(u) - i\,E_1(u)\right) du.$$

この形から明らかなように $f_n(0)$ において

$$\Delta \to \frac{1}{\Delta}, \qquad \sigma \to 1-\sigma \qquad E(u) \to -E_1(u)$$

とおきかえたものと全く同じである。従って

$$n = y\,(1-\rho(n))\quad \text{とすると}$$

$$|g_n(0)| \ll \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \left(\rho(n) \le \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{t\,(1-(1-\rho(n))^2)} & \left(\rho(n) \ge \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{cases}$$

よって　$n \le y$ ならば

$$|G(s,n,y)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\,\Delta^{a-1}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}$$

$$\ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\,\Delta^{a-1}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}\, e^{-2\frac{n^2}{qt\Delta^2}}$$

$$\left(\because\ \frac{2n^2}{qt\Delta^2} \le \frac{1}{\pi}\right).$$

14.) $G(s,n,y)$ の評価，$n > y$ の場合．

$$G(s,n,y) = \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2},\ \frac{\pi}{qz}n^2\right)}{n^{1-s}\,\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

$$= \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\left(\frac{\pi}{qz}n^2\right)^{\frac{1-s+a}{2}}}{n^{1-s}\,\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{qz}n^2\xi}\,\xi^{\frac{1-s+a}{2}-1}\,d\xi.$$

$$|G(s,n,y)| \ll \left(\frac{n}{\Delta\sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{a}{2}}\sqrt{t}\,\Delta^{a-1}\,|g_n(1)|.$$

$$g_n(1) = \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{qz}n^2\xi}\ \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1}\,d\xi$$

$$= \frac{2}{1-\alpha+a}\int_1^\infty \exp\left(-H_1(u) - iE_1(u)\right)du.$$

これも形から明らかなように，$f_n(1)$において

$$\Delta \to \frac{1}{\Delta}, \quad \alpha \to 1-\alpha, \quad E(u) \to -E_1(u)$$

とおきかえたものに他ならない。従って　$n = y\,(1+\rho(n))$　とするとき，

$$|g_n(1)| \ll \begin{cases} \dfrac{e^{-H_1(1)}}{\sqrt{t}} & \left(\rho(n) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \\[2ex] \dfrac{e^{-H_1(1)}}{t\left((1+\rho(n))^2-1\right)} & \left(\rho(n) \geq \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{cases}$$

よって　$n > y$　のとき，

$$|G(s,n,y)| \ll \left(\frac{n}{\Delta\sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{a}{2}}\,\Delta^{a-1}\cdot\frac{e^{-H_1(1)}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}.$$

$$H_1(1) = \frac{\pi n^2}{q\Delta^2}\sin\frac{1}{t} \geq \frac{2n^2}{qt\Delta^2}$$

$$e^{-H_1(1)} \leq e^{-\frac{2n^2}{qt\Delta^2}} \leq \left(\frac{qt\Delta^2}{n^2}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{n^2}{qt\Delta^2}}$$

$$|G(s,n,y)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^{\sigma-1}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{n^2}{qt\Delta^2}}.$$

15.) 13.) 及び 14.) から

全ての n について

$$|G(s,n,y)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^{\sigma-1}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{n^2}{qt\Delta^2}}$$

$$= \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^{\sigma-1}}{1+\sqrt{t}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{y}\right)^2}.$$

16.) 以上 9.) 12.) 15.) をまとめると

条件

$t \geqq 1$, $q \geqq 2$, $\Delta > 0$, $0 < \sigma < 1$

$x = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{qt}{2\pi}}$, $y = \Delta\sqrt{\frac{qt}{2\pi}}$, χ : primitive mod q,

M : 任意の正数

のもとに

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leqq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi)\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leqq y} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} +$$

$$+ \sum_{n \leqq x \log qt} \chi(n) F(s,n,x) + \sum_{n \leqq y \log qt} \overline{\chi}(n) G(s,n,y) +$$

$$+ O_M(\Delta^\alpha (qt)^{-M}).$$

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\alpha}{2}}\Delta^\alpha}{1+\sqrt{t}\,|1-(\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{1}{2\pi}(\frac{n}{x})^2}$$

$$|G(s,n,x)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\alpha}{2}}\Delta^{\alpha-1}}{1+\sqrt{t}\,|1-(\frac{n}{y})^2|} e^{-\frac{1}{2\pi}(\frac{n}{y})^2}.$$

次に，$0 \leq t \leq 1$ の場合についてしらべてみなければならない。そこで，いままでの考察中において，条件 [Y] を次のものに変える。

$$[Y'] \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \quad q \geq 2, \quad \Delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \\ z = \Delta^2 \\ x = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{q}{2\pi}}, \quad y = \Delta\sqrt{\frac{q}{2\pi}}. \end{cases}$$

17.) まず

$$F_1' = \sum_{n \geq x\log q} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\Gamma(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q}n^2 z)}{\Gamma(\frac{s+a}{2})}$$ について.

$$F_1' = -2\,\frac{\left(\frac{\pi}{q}z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{x\log q}^{\infty} \Bigl\{ \sum_{x\log q \le n \le u} \frac{\chi(n)}{n^s} \Bigr\} e^{-\frac{\pi}{q}zu^2} u^{s+a-1}\,du$$

$$\left|\left(\frac{\pi}{q}z\right)^{\frac{s+a}{2}}\right| \ll \Delta^{\sigma+a} q^{-\frac{\sigma+a}{2}}$$

$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|}$$ ：有界

$$\Bigl|\sum_{x\log q \le n \le u} \frac{\chi(n)}{n^s}\Bigr| \ll \frac{\sqrt{q}\,\log q}{(x\log q)^{\sigma}} \ll \Delta^{\sigma} q^{\frac{1-\sigma}{2}} \log q.$$

従って

$$|F_1'| \ll \Delta^{2\sigma+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q\; e^{-\frac{\pi}{2q}z(x\log q)^2} \int_{x\log q} e^{-\frac{\pi z}{2q}u^2} u^{\sigma+a-1}\,du$$

$$\ll \Delta^{2\sigma+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q\; e^{-\frac{1}{4}(\log q)^2} \left(\frac{\sqrt{q}}{\Delta}\right)^{\sigma+a}$$

$$\ll_M \Delta^{\sigma} q^{-M} \qquad (M：任意).$$

18.) 全く同様に

$$F_2' = \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{n \geq y\log q} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{qz}n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

についても

$$|F_2'| \ll_M \Delta^{\sigma-1} q^{-M}$$ を得る。

19.) 以上まとめると [Y'] なる条件下に

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}$$

$$+ \sum_{n \leq x \log q} \chi(n) F(s,n,x) + \sum_{n \leq y \log q} \bar{\chi}(n) G(s,n,y) + O_M(\Delta^a q^{-M}).$$

但し F, G は 9.) にある通り。

20.) $F(s,n,x)$ $(n \leq x)$ の評価.

$$F(s,n,x) = -\frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 z \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= -\frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(0)$$

$\dfrac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|}$ は有界であるから

$$|F(s,n,x)| \ll n^a \Delta^{\sigma+a} q^{-\frac{\sigma+a}{2}} |f_n(0)| \ll q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^\sigma |f_n(0)|.$$

$$|f_n(0)| \ll \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 \Delta^2 \xi} \xi^{\frac{\sigma+a}{2}-1} d\xi \ll 1.$$

しかるに

$$e^{-\frac{\pi}{q} n^2 \Delta^2} \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$|f_n(0)| \ll e^{-\frac{\pi}{q}n^2\Delta^2} \quad としてよい。$$

次に

$$n = x(1-\rho(u)) \qquad (\rho(u) \geqq 0)$$

とすると,

$$e^{-\frac{\pi}{q}n^2\Delta^2} = e^{-\frac{1}{2}(1-\rho(u))^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-\rho(u))^2} \cdot e^{-\frac{1}{4}(1-\rho(u))^2}$$

$$\leqq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-\rho(u))^2}\, e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2}$$

$$\leqq \frac{4e^{-\frac{1}{2}}}{1+1-(1-\rho(u))^2}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$\leqq \frac{4e^{-\frac{1}{2}}}{1+\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{x}\right)^2}.$$

従って $n \leqq x$ のとき

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{q^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^{\sigma}}{1+\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{x}\right)^2}.$$

21.) $F(s,n,x)$ $(n>x)$ の評価.

$$F(s,n,x) = -\frac{\left(\frac{\pi}{q}n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{q}n^2 z \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|} \text{ : 有界}$$

$$|F(s,n,x)| \ll n^a \Delta^{\sigma+a} q^{-\frac{\sigma+a}{2}} |f_n(1)|$$

$$\ll q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^\sigma \left(\frac{n\Delta}{\sqrt{q}}\right)^a |f_n(1)|$$

$$|f_n(1)| \leqslant \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{q}n^2\Delta^2\xi} \xi^{\frac{\sigma+a}{2}-1} d\xi$$

$$\leqslant e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2\xi} \xi^{\frac{\sigma+a}{2}-1} d\xi$$

$$\ll \left(\frac{\sqrt{q}}{n\Delta}\right)^{\sigma+a} e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2}.$$

よって

$$|F(s,n,x)| \ll q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^\sigma \left(\frac{\sqrt{q}}{n\Delta}\right)^\sigma e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2}$$

$$= \frac{1}{n^\sigma} e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2}$$

$$\ll \Delta^\sigma q^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2}.$$

しかるに

$$e^{-\frac{\pi}{2q}n^2\Delta^2} = e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}\frac{1}{e^{\frac{1}{8}\left(\left(\frac{n}{x}\right)^2-1\right)+\frac{1}{8}}}$$

$$\leq \frac{8e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}}{1+\left(\left(\frac{n}{x}\right)^2-1\right)} = \frac{8e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}}{1+\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)\right|}.$$

従って $n > x$ ならば

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{q^{-\frac{a}{2}}\Delta^a}{1+\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}.$$

22.) 以上 20.) 及び 21.) から,

全ての n について 条件 $[Y']$ のもとに

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{q^{-\frac{a}{2}}\Delta^a}{1+\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|}e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

23.) $G(s,n,y)$ についても同様にして

全ての n について 条件 $[Y']$ のもとに

$$|G(s,n,y)| \ll \frac{q^{-\frac{a}{2}}\Delta^{a-1}}{1+\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|}e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{y}\right)^2}$$

以上全てをまとめると，

定理 (A.F. Lavrik)

$\tau = \max(1, |t|)$, $q \geqq 2$, $\Delta > 0$, $0 < \sigma < 1$

$x = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}$, $y = \Delta\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}$, M : 任意の正整数,

χ : primitive mod q.

とするとき

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leqq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leqq y} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} +$$

$$+ \sum_{n \leqq x \log q\tau} \chi(n) F(s,n,x) + \sum_{n \leqq y \log q\tau} \overline{\chi}(n) G(s,n,y) +$$

$$+ O_M\left((\Delta^\sigma + \Delta^{\sigma-1})(q\tau)^{-M}\right)$$

なる近似函数等式が成立し，更に

$$|F(s,n,x)| \ll \frac{(q\tau)^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^\sigma}{1+\sqrt{\tau}\,\left|1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$|G(s,n,x)| \ll \frac{(q\tau)^{-\frac{\sigma}{2}}\Delta^{\sigma-1}}{1+\sqrt{\tau}\,\left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{y}\right)^2}.$$

以下，このLavrikの定理をもとにして，はじめにのべたL－函数の4乗平均値を計算する。

そこで，これからは

$$[\mathrm{Z}]\begin{cases} s=\frac{1}{2}+it, & \tau=\max(1,|t|), \quad q\geq 2 \\ xy=\frac{q\tau}{2\pi}, & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}\leq x\leq 2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}} \\ \text{従って} & \frac{1}{2}\leq\Delta\leq 2 \end{cases}$$

ときめておく。

24.)

$$|L(s,\chi)|^4 \ll \left|\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|^4+\left|\sum_{n\leq y}\frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}}\right|^4+$$

$$+\left|\sum_{n\leq x\log q\tau}\chi(n)F(n,s,x)\right|^4+\left|\sum_{n\leq y\log q\tau}\overline{\chi}(n)G(n,s,y)\right|^4+$$

$$+O_M((q\tau)^{-M}).$$

$$=\left|\sum_{n\leq x^2}\frac{\chi(n)}{n^s}a(n,x^2)\right|^2+\left|\sum_{n\leq y^2}\frac{\chi(n)}{n^s}a(n,y^2)\right|^2+$$

$$+\left|\sum_{n\leq x\log q\tau}\chi(n)F(n,s,x)\right|^4+\left|\sum_{n\leq y\log q\tau}\overline{\chi}(n)G(n,s,y)\right|^4+O((q\tau)^{-2})$$

但し

$$a(n, x^2) = \sum_{\substack{n = d_1 d_2 \\ d_1, d_2 \le x}} 1 \qquad |a(n,x^2)|,\ |a(n,y^2)| \le d(n)\text{ : 約数.}$$

この両辺に　$x\,dx$ をかけて　$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}} \le x \le 2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}$　で積分を行う.

$$q\tau\,|L(s,\chi)|^4$$

$$\ll \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big| \sum_{n \le x^2} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,x^2) \Big|^2 d(x^2) \;+$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big| \sum_{n \le y^2} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,y^2) \Big|^2 d(x^2) \;+$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big| \sum_{n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 x\,dx \;+$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big| \sum_{n \le y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(n,s,y) \Big|^4 x\,dx \;+ O\big((q\tau)^{-1}\big).$$

しかるに　$xy = \sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}$　であるから,

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

$$d(x^2) = 2x\,dx = -2y \cdot \frac{x}{y}\,dy$$

そして明らかに $\frac{x}{y} \leq 4$.

従って，上記の積分のうち，オ2，オ4番目は y の積分になおしてかまわない。そこで $x^2 \longrightarrow \xi$ （$y^2 \longrightarrow \xi$）と変数変換して

$$|L(s,\chi)|^4 \ll \frac{1}{q\tau}\int_{\frac{q\tau}{8\pi}}^{\frac{2q\tau}{\pi}} \Big|\sum_{n\leq\xi}\frac{\chi(n)}{n^s}\,a(n,\xi)\Big|^2 d\xi \; +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{q\tau}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big|\sum_{n\leq x\log q\tau}\chi(n)F(n,s,x)\Big|^4 dx \; +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{q\tau}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big|\sum_{n\leq y\log q\tau}\overline{\chi}(n)\,G(n,s,y)\Big|^4 dy \; + O\big((q\tau)^{-2}\big).$$

25.) まず

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\frac{1}{\sqrt{q\tau}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \Big|\sum_{n\leq x\log q\tau}\chi(n)F(n,s,x)\Big|^4 dx$$

について考える。これは，全部の $\chi \bmod q$ に和をひろげて，

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

を計算することによって評価される。

以下において

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{M < n \le M+N} a_n \chi(n) \Big|^2 \ll \varphi(q)\left(1+\frac{N}{q}\right) \sum_{M \le n \le M+N} |a_n|^2$$

（ a_n ：任意の複素数）

をたえず用いる。これの証明は容易である。

さて，

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le \frac{x}{2}} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 + \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \ge 2x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 .$$

26.)

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le \frac{x}{2}} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$= \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le \frac{x^2}{4}} \chi(n) L(n,s,x) \Big|^2 .$$

$$P(n,s,x) = \sum_{\substack{lm=n \\ l,m \le \frac{x}{2}}} F(m,s,x)F(l,s,x)$$

$$|P(n,s,x)| \le \sum_{\substack{lm=n \\ l,m \le \frac{x}{2}}} |F(l,s,x)||F(m,s,x)|$$

$$\ll \sum_{\substack{lm=n \\ l,m \le \frac{x}{2}}} \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}}}{1+\sqrt{\tau}\,\left|1-\left(\frac{l}{x}\right)^2\right|} \cdot \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}}}{1+\sqrt{\tau}\,\left|1-\left(\frac{m}{x}\right)^2\right|}$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{q\tau}\cdot\tau}\, d(n) \quad (\because\ l,m \le \tfrac{x}{2})$$

よって

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \le \frac{x}{2}} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \varphi(q)\left(1+\frac{x^2}{q}\right) \sum_{n \le x^2} \frac{1}{q\tau^3} d^2(n)$$

$$\ll \varphi(q)\,(1+\tau)\frac{1}{q\tau^3}\cdot q\tau \log^3 q\tau \qquad \left(\because \sum_{n \le u} d^2(n) \ll u \log^3 u\right)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau .$$

27). 次に

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2x \le n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$= \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{j=1}^{\ll \log\log q\tau} \sum_{2^j x \le n < 2^{j+1} x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 .$$

ここで次のことに注意する: Hölder 不等式により

$$\Big| \sum_j b_j \Big|^4 = \Big| \sum_j \frac{1}{2^{\frac{j}{4}}} \cdot 2^{\frac{j}{4}} b_j \Big|^4$$

$$\le \Big(\sum_j \frac{1}{2^{\frac{j}{3}}} \Big)^3 \Big(\sum_j 2^j |b_j|^4 \Big)$$

$$\ll \sum_j 2^j |b_j|^4 .$$

よって

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2x \le n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \sum_{j=1}^{\ll \log\log q\tau} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2^j x \le n < 2^{j+1} x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$= \sum_{j=1}^{\ll \log\log q\tau} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2^{2j} x^2 \le n < 2^{2j+2} x^2} \chi(n) P_j(n,s,x) \Big|^2 .$$

$$P_j(n,s,x) = \sum_{\substack{lm = n \\ 2^j x \le l,\, m < 2^{j+1} x}} F(m,s,x)\, F(l,s,x)$$

$$|P_j(n,s,x)| \ll \sum_{\substack{lm = n \\ 2^j x \le l,\, m < 2^{j+1} x}} \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{m}{x}\right)^2}}{1 + \sqrt{\tau}\left|1 - \left(\frac{m}{x}\right)^2\right|} \cdot \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{l}{x}\right)^2}}{1 + \sqrt{\tau}\left|1 - \left(\frac{l}{x}\right)^2\right|}$$

$$\ll \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{2}}}{\tau\, 2^{4j}}\, e^{-\frac{1}{4} 2^{2j}}\, d(n).$$

従って

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2^{2j} x^2 \le n < 2^{2j+2} x^2} \chi(n)\, P_j(n,s,x) \Big|^2$$

$$\ll \varphi(q)\left(1 + \frac{2^{2j+2}}{q} x^2\right) \sum_{n \le 2^{2j+2} x^2} \frac{e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}}{q\tau^3\, 2^{8j}}\, d^2(n)$$

$$\ll \varphi(q)\, \frac{2^{2j+2}}{q} x^2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}}{q\tau^3\, 2^{8j}} \cdot x^2\, 2^{2j+2} \log^3 q\tau$$

$$\left(\because\ x^2\, 2^{2j+2} \ll q\tau \log^2 q\tau\right)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau \cdot e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}.$$

よって

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{2x \le n \le x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau \sum_{j} 2^j e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}} \ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau .$$

28.) 更に

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{\frac{1}{2}x < n < 2x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{j=0}^{2^{j+1} \le \sqrt{\tau}} \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}}) < n \le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{j=0}^{2^{j+2} \le \sqrt{\tau}} \sum_{x(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}}) \le n < x(1-\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}}) \le n \le x(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 .$$

$$\ll \sum_{j=0}^{2^{j+1} \le \sqrt{\tau}} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}}) < n \le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4 +$$

$$+\sum_{j=0}^{2^{j+2}\le\sqrt{\tau}} 2^{j} \sum_{\chi \bmod q} \Bigl| \sum_{x(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})\le n< x(1-\frac{2^{j}}{\sqrt{\tau}})} \chi(n)\, F(n,s,x) \Bigr|^{4} +$$

$$+\sum_{\chi \bmod q} \Bigl| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}})\le n\le x(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})} \chi(n)\, F(n,s,x) \Bigr|^{4}.$$

29.)　まず,

$$\sum_{\chi \bmod q} \Bigl| \sum_{x(1+\frac{2^{j}}{\sqrt{\tau}})< n\le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})} \chi(n)\, F(n,s,x) \Bigr|^{4}$$

$$=\sum_{\chi \bmod q} \Bigl| \sum_{x^2(1+\frac{2^{j}}{\sqrt{\tau}})^2< n\le x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2} \chi(n)\, P_j'(n,s,x) \Bigr|^{2}.$$

$$P_j'(n,s,x) = \sum_{\substack{lm=n \\ x(1+\frac{2^{j}}{\sqrt{\tau}})<l,m\le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})}} F(l,s,x)\, F(m,s,x).$$

$$|P_j'(n,s,x)| \ll \sum_{\substack{lm=n \\ x(1+\frac{2^{j}}{\sqrt{\tau}})<l,m\le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})}} \frac{(q\tau)^{-\frac14}}{1+\sqrt{\tau}\,|1-(\frac{l}{x})^2|} \cdot \frac{(q\tau)^{-\frac14}}{1+\sqrt{\tau}\,|1-(\frac{m}{x})^2|}$$

$$\ll \frac{d(n)}{\sqrt{q\tau}\; 2^{2j}}.$$

よって

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}}) < n \le x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \varphi(q) \left\{ 1 + \frac{1}{q} \left(x^2 (1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2 - x^2 (1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}}) \right) \right\} \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2 < n \le x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2} \frac{d^2(n)}{q\tau 2^{4j}}$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\tau} \cdot \frac{1}{2^{4j} q} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{\tau}} 2^j \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2 < n \le x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} 2^{-3j} \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2 < n \le x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n) .$$

全く同様にして

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{x(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}}) \le n < x(1-\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} 2^{-3j} \sum_{x^2(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2 \le n < x^2(1-\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n)$$

又，更に，

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}}) \le n \le x(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2 \le n \le x^2(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n)$$

と容易にわかる。

30.) 以上 28.) 29.) をまとめると,

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \chi(n) F(n,s,x) \Big|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{j=0}^{2^{j+1} \le \sqrt{\tau}} 2^{-2j} \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2 \le n \le x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n) +$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{j=0}^{2^{j+2} \le \sqrt{\tau}} 2^{-2j} \sum_{x^2(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}})^2 \le n \le x^2(1-\frac{2^j}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n) +$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2 \le n \le x^2(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n)$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{\frac{x^2}{4} \le n \le x^2(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n) \sum_{j}{}^{(i)} \frac{1}{2^{2j}} +$$

$$+\frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}}\sum_{x^2(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2\le n\le 4x^2} d^2(n)\sum_j{}_{(\mathrm{ii})}\frac{1}{2^{2j}}+$$

$$+\frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}}\sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2\le n\le x^2(1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})^2} d^2(n)$$

但し，　$\sum_j{}_{(\mathrm{i})}$ においては，

$$x^2\left(1+\frac{2^j}{\sqrt{\tau}}\right)^2\le n\le x^2\left(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{\tau}}\right)^2$$

よって

$$\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left(\frac{\sqrt{n}}{x}-1\right)\le 2^j\le\sqrt{\tau}\left(\frac{\sqrt{n}}{x}-1\right)$$

又，　$\sum_j{}_{(\mathrm{ii})}$ においては

$$\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left(1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right)\le 2^j\le\sqrt{\tau}\left(1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right).$$

従って

$$\sum_j{}_{(\mathrm{i})}\frac{1}{2^{2j}},\quad\sum_j{}_{(\mathrm{ii})}\frac{1}{2^{2j}}\ll\frac{1}{1+\tau\left|1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right|^2}$$

とかける。すなわち，

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}\chi(n)F(n,s,x)\right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{\frac{x^2}{4} \leq n \leq 4x^2} \frac{d^2(n)}{1+\tau\left|1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right|^2}$$

31.) 従って、25) 26) 27) 30) をまとめると

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \sum_{\frac{x^2}{4} \leq n \leq 4x^2} \frac{d^2(n)}{1+\tau\left|1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right|^2}.$$

としてこのことから

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n,s,x) \right|^4 dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \sum_{\frac{x^2}{4} \leq n \leq 4x^2} \frac{d^2(n)}{1+\tau\left(1-\frac{\sqrt{n}}{x}\right)^2} dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau} \sum_{\frac{q\tau}{32\pi} \leq n \leq 8\frac{q\tau}{\pi}} d^2(n) \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \frac{x^2}{x^2+\tau(x-\sqrt{n})^2} dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau}\log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau}\sum_{n\le\frac{8}{\pi}q\tau} d^2(n)\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \frac{q\tau}{q\tau+\tau(x-\sqrt{n})^2}\,dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau}\log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau}\sum_{n\le\frac{8}{\pi}q\tau} d^2(n)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{q+(x-\sqrt{n})^2}\,dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau}\log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau}\sum_{n\le\frac{8}{\pi}q\tau} d^2(n)\sqrt{q}$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau}\log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q\tau}\cdot q\tau\log^3 q\tau$$

$$\ll \varphi(q)\log^3 q\tau .$$

全く同様にして

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*}\frac{1}{\sqrt{q\tau}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}\Bigl|\sum_{n\le y\log q\tau}\bar{\chi}(n)G(n,s,y)\Bigr|^2 dy$$

$$\ll \varphi(q)\log^3 q\tau .$$

32.) 結局 24.) と 31.) とをまとめると

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4$$

$$\ll \frac{1}{q\tau} \sum_{\chi \bmod q} \int_{\frac{q\tau}{8\pi}}^{\frac{2}{\pi}q\tau} \Big| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,\xi) \Big|^2 d\xi \quad + \varphi(q)\log^3 q\tau .$$

33) さて，$|t| \leq 2$ の場合は $\xi \leq \frac{4}{\pi}q$ であるから

$$\sum_{\chi \bmod q} \Big| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,\xi) \Big|^2$$

$$\ll \varphi(q) \left(1 + \frac{\xi}{q}\right) \sum_{n \leq \xi} \frac{d^2(n)}{n} \ll \varphi(q) \log^4 q$$

すなわち

$|t| \leq 2$ ならば

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \ll \varphi(q)\log^4 q .$$

これは Linnik の結果である。

従って

$0 \leq T \leq 2$ ならば

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 dt \ll T\varphi(q)\log^4 q(T+2) .$$

34.) そこで, $T \geqq 2$ とすると

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \, dt \ll \varphi(q)\log^4 q +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{2}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \, dt .$$

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{2}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \, dt$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{2^{j+1} \leqq T} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \, dt$$

前節の結果をもちいて,

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 \, dt$$

$$\ll 2^j \varphi(q) \log^3 qT + \frac{1}{q 2^j} \sum_{\chi \bmod q} \int_{\frac{q 2^j}{8\pi}}^{\frac{2}{\pi} q 2^{j+1}} d\xi \int_{2^j}^{2^{j+1}} \Big| \sum_{n \leqq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,\xi) \Big|^2 dt.$$

ここで 強力な Gallagher の不等式

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T_0}^{T_0} \Big| \sum_{n \leqq N} a_n \chi(n) n^{-it} \Big|^2 dt$$

$$\ll \varphi(q)\left(T_0 + \frac{N}{q}\right) \sum_{n \leq N} |a_n|^2$$

（但し　$T_0 \geqq 2$，a_n は任意の複素数）

をもちいて

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n,\xi) \right|^2 dt$$

$$\ll \varphi(q)\left(2^j + \frac{\xi}{q}\right) \sum_{n \leq \xi} \frac{d^2(n)}{n}$$

$$\ll \varphi(q)\left(2^j + \frac{\xi}{q}\right) \log^4 \xi$$

$$\ll \varphi(q)\, 2^j \log^4 qT \qquad \left(\because\ \xi \leq \frac{2}{\pi} q 2^{j+1}\right).$$

すなわち

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| L\left(\tfrac{1}{2}+it, \chi\right) \right|^4 dt \ll 2^j \varphi(q) \log^4 qT.$$

従って

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \int_{2}^{T} \left| L\left(\tfrac{1}{2}+it, \chi\right) \right|^4 dt \ll \sum_{j=1}^{2^{j+1} \leq T} 2^j \varphi(q) \log^4 qT$$

$$\ll T \varphi(q) \log^4 qT.$$

以上，33) 及び 34) をまとめると，

定理 (Lavrik - Montgomery - Huxley)

任意の $T \geqq 0$ について

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it, \chi)|^4 \, dt \ll T\varphi(q) \log^4 q(T+2).$$

又，このことから容易に次のことを導くことができる，

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it, \chi)|^4 \, dt \ll Tq \log^4 q(T+2).$$

更にまた，Large Sieve をとり入れれば

$$\sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it, \chi)|^8 \, dt \ll T^2 Q^2 \log^{16} Q(T+2)$$

を示すことも容易である。

— Kész —